

Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Естественных и математических наук»

Прикладные компьютерные программы

Методические указания к
выполнению практической работы
для студентов направления

15.03.02 «Технологические машины и оборудование»

21.03.01 "Нефтегазовое дело"

очной, заочной и очно-заочной форм обучения

ВВЕДЕНИЕ.

MathCAD является математическим редактором, позволяющим проводить разнообразные научные и инженерные расчеты. Благодаря простоте применения, наглядности математических действий, обширной библиотеке встроенных функций и численных методов, возможности символьных вычислений, представления результатов в виде графиков разных типов MathCAD стал наиболее популярным математическим приложением.

Возможности математического редактора MathCAD:

- наличие формульного редактора;
- математические расчеты производятся немедленно, в соответствии с введенными формулами;
- возможность построения и форматирования графиков различных типов;
- возможность ввода и вывода данных в файлы различных форматов;

и многое другое.

Интерфейс пользователя.

В MathCAD интерфейс пользователя сходен с другими приложениями Windows. Его составные части:

- верхнее меню, или строка меню;
- панели инструментов **Standard** (Стандартная) и **Formatting** (Форматирование);
- панель инструментов **Math** (Математика) и доступные через нее дополнительные математические панели инструментов;
- рабочая область;
- строка состояния;
- всплывающие или контекстные меню;
- диалоговые окна.

Строка меню располагается в самой верхней части окна MathCAD. Она содержит девять заголовков, щелчок мышью на каждом из которых приводит к появлению соответствующего меню с перечнем сгруппированных по действию команд

- **File** (Файл) - команды, связанные с созданием, открытием, сохранением, пересылкой по электронной почте и распечаткой на принтере файлов с документами;
- **Edit** (Правка) - команды, относящиеся к правке текста (копирование, вставка, удаление фрагментов и т.д.);
- **View** (Вид) - команды, управляющие внешним видом документа в окне редактора MathCAD;
- **Insert** (Вставка) - команды вставки различных объектов в документы;
- **Format** (Формат) - команды форматирования текстов, формул и графиков;
- **Math** (Математика) - команды управления вычислительным процессом;
- **Symbolics** (Символика) - команды символьных вычислений;
- **Window** (Окно) - команды управления расположением окон с различными документами на экране;
- **Help** (Справка) - команды вызова контекстно-зависимой справочной информации, сведений о версии программы.

Панели инструментов служат для быстрого (в один щелчок мыши) выполнения наиболее часто применяемых команд. Все действия, которые можно выполнить с помощью панелей инструментов, доступны и через верхнее меню, но гораздо удобнее панели вывести на экран. Для размещения соответствующей панели на экране необходимо выбрать пункт верхнего меню View (Вид), навести курсор мыши на пункт подменю Toolbars (Панели инструментов) и выбрать в появившемся подменю соответствующий пункт.

- **Standard** (Стандартная) - служит для выполнения большинства операций, таких как действие с файлами, редакторская правка, вставка объектов и доступ к справочным системам;

- **Formatting** (Форматирование) - для форматирования текста и формул;

- **Math** (Математика) - для вставки математических символов и операторов в документы.

Большую часть окна MathCAD занимает *рабочая область*. Документ программы MathCAD называется рабочим листом. Он содержит объекты: формулы, графические области и текстовые блоки. В ходе расчетов формулы и графические области обрабатываются последовательно, слева направо и сверху вниз. а текстовые блоки игнорируются. Ввод

информации осуществляется в месте расположения курсора. Если ни один объект не выбран, используется крестообразный курсор (визир), определяющий место создания следующего объекта. При вводе формул используется уголкового курсора, указывающий текущий элемент выражения. При вводе данных в текстовый блок применяется текстовый курсор в виде вертикальной черты.

В нижней части окна MathCAD под горизонтальной полосой прокрутки расположена строка состояния, на которой отображается самая основная информация о режиме редактирования: контекстно-зависимая подсказка о готовящемся действии; режим вычислений (автоматический AUTO или задаваемый вручную Calc F9), текущий режим раскладки клавиатуры CAP; текущий режим раскладки клавиатуры NUM; номер страницы, на которой находится курсор. Чтобы показать или скрыть строку состояний, выполните команду **View / Status Bar** (Вид / Строка состояния).

Вместе с MathCAD поставляется несколько источников справочной информации, доступ к которым осуществляется через меню **Help** (Справка). К ним относятся:

1. **MathCAD Help** (Справка) - система справки или технической поддержки.
2. **Developer's Reference** (Справка для разработчиков) - дополнительные главы справки для разработчиков собственных самостоятельных приложений на языке MathCAD.
3. **Author's Reference** (Справка для авторов) - дополнительные главы справки для авторов собственных электронных книг, т.е. коллекций вычислений, снабженных гиперссылками и интерактивными примерами MathCAD - программ.
4. **Resource Center** (Центр Ресурсов) - самостоятельное приложение, оформленное в виде электронной книги с решением множества математических примеров, демонстрирующих практическое применение возможностей MathCAD 2001.
5. **Open Book** (Открыть книгу) - пункт меню, позволяющий открыть существующую в виде файла электронную книгу (созданную вами или полученную от других авторов).

Кроме этого, меню Справка содержит следующие пункты:

- **Tip of the Day** (Совет Дня) - вызов диалогового окна «Совет Дня», выдающего случайным образом полезную информацию;
- **MathCAD Update** (Обновление MathCAD) - проверка сайта фирмы MathSoft на наличие обновлений MathCAD 2001;
- **About MathCAD** (О программе) - получение информации о текущей версии MathCAD и его разработчиках.

Окно справочной системы MathCAD (пункт меню **Help**) построено в характерном для Windows стиле и состоит из двух частей. Справа отображается текст соответствующей статьи. Слева имеется три вкладки:

- **Contents** (Содержание) - вывод названий статей, в рассмотренном смысловом порядке по главам и подзаголовкам;
- **Index** (Индекс) - перечень названий справочных статей в алфавитном порядке;
- **Search** (Поиск) - поиск статей справки по ключевым словам или фразам.

Работа № 1.

ОСНОВЫ РАБОТЫ С СИСТЕМОЙ MathCAD.

ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ И ВЕКТОРАМИ.

Цель: научиться работать в среде MathCAD, вычислять значения функций, выполнять действия с матрицами в среде MathCAD.

Ввод формул

Формулы — основные объекты рабочего листа. Новый объект по умолчанию является формулой. Чтобы набрать формулу, надо установить крестообразный курсор в нужное место и начать ввод букв, цифр, знаков арифметических операций. При этом создается область формулы, в которой появляется уголкового курсора, охватывающий ее текущий элемент, например имя переменной (функции) или число. При вводе бинарного оператора по другую сторону знака операции автоматически появляется поле заполнения в виде черного прямоугольника. В это место помещают очередной оператор.

Для управления порядком операций используют круглые скобки, которые можно вводить вручную. Уголкового курсора позволяет автоматизировать такие действия. Чтобы выделить элементы формулы, которые в рамках операции должны рассматриваться как единое целое, используют клавишу ПРОБЕЛ. При каждом ее нажатии уголкового курсора «расширяется», охватывая элементы формулы, примыкающие к данному. После ввода знака операции элементы в пределах уголкового курсора автоматически заключаются в скобки. Элементы формул можно вводить с клавиатуры или с помощью специальных панелей управления, которые открываются из меню View (Вид) или кнопками панели управления Math (Математика). Для ввода элементов формул предназначены следующие панели управления:

- Arithmetic (Счет) для ввода чисел, знаков типичных математических операций и наиболее часто употребляемых стандартных функций;
- Evaluation (Вычисление) для ввода операторов вычисления и знаков логических операций;
- Graph. (График) для построения графиков;
- Matrix (Матрица) для ввода векторов и матриц и задания матричных операций;
- Calculus (Исчисление) для задания операций, относящихся к математическому анализу;
- Greek (Греческий алфавит) для ввода греческих букв (их можно также вводить с клавиатуры, если сразу после ввода соответствующего латинского аналога нажимать

сочетание клавиш CTRL+C, например последовательное нажатие клавиш [a] [CTRL+G] дает греческую букву α);

- Symbolic (Аналитические вычисления) для управления аналитическими преобразованиями;
- Programming (Программирование) для создания программных блоков.

Алфавит, константы и простые переменные

Алфавит входного языка системы MathCAD представляет совокупность разнообразных символов и слов, которые используются при задании команд. Он содержит: а) малые и большие латинские буквы; б) малые и большие греческие буквы; в) арабские цифры от 0 до 9; г) системные переменные; д) знаки операций; е) имена встроенных функций; ж) спецзнаки.

Числовые константы задаются с помощью арабских цифр, десятичной точки и знака «-» (минус): 123 12.3 -84.295 $2.3 \cdot 10^{-4}$. Хотя мы вводим при наборе знак умножения как звездочку «*», на экране он отображается в виде точки. Операция возведения в степень набирается с помощью спецзнака «^», который представляется на экране в виде обычного надстрочного показателя степени. Диапазон возможных значений десятичных чисел лежит в пределах от 10^{-307} до 10^{307} . Большинство вычислений система выполняет как с действительными, так и с комплексными числами в привычном алгебраическом виде:

$$Z = \operatorname{Re} Z + i \cdot \operatorname{Im} Z = \operatorname{Re} Z + j \cdot \operatorname{Im} Z, \text{ где либо } i = \sqrt{-1}, \text{ либо } j = \sqrt{-1}.$$

Перед использованием любых операций с комплексными числами надо сперва определить мнимую единицу (т.е. присвоить ее или переменной i , или переменной j). В MathCAD 2001 имеется и другой способ ввода мнимого числа. Сначала вводится действительный сомножитель (если он равен 1, то необходимо ввести <1>, иначе символ « i » будет определен MathCAD как переменная), затем вводится символ « i » или « j » непосредственно после сомножителя. Переменные являются поименованными объектами с некоторым значением, которое по ходу выполнения программы может меняться. Имена переменных и других объектов называются идентификаторами: они состояются из латинских и греческих букв, а также цифр, возможен также знак «_» — знак разрядки. Примеры правильных имен: x , Z , x_5 , α , Y -coordinate. Заметим, что малые и большие буквы в идентификаторах *различаются*.

Отличительной чертой MathCAD является возможность обращения с переменными разных типов.

К основным типам данных относятся:

1. **Числа** - действительные, комплексные, встроенные константы.
2. **Строки** - любой текст, заключенный в кавычки.
3. **Массивы** - упорядоченные последовательности чисел или строк. К ним относятся, в том числе, ранжированные переменные, векторы и матрицы.

Ввод - вывод данных основного типа реализуется присваиванием и выводом непосредственно в документе.

Для присваивания значений переменным используется знак «:=». Этот знак набирается нажатием одной клавиши «:=» или кнопки Assign Value (Присвоить значение) на панели инструментов Evaluation (Вычисление). Слева от знака присваивания указывают имя переменной, такое присваивание называется локальным. Символ обычного равенства в MathCAD является оператором вывода значений переменной на экран. Существует возможность глобального присваивания с помощью символа «≐». В отличие от локального оно может производиться в любом месте документа и действует в нем до тех пор, пока переменной не будет присвоено другое значение.

Некоторые имена в MathCAD зарезервированы под системные переменные, которые называются **встроенными константами**. Они делятся на два типа: **математические**, хранящие значения некоторых общеупотребительных специальных математических символов, и **системные**, определяющие работу большинства численных алгоритмов, реализованных в MathCAD.

Математические константы:

- ∞ - символ бесконечности (вводится клавишами <Ctrl>+<Shift>+<z>);
- e - основание натурального логарифма (вводится клавишей <e>);
- π - число «пи» (вводится клавишами <Ctrl>+<Shift>+<p>);
- i, j - мнимая единица;
- % - символ процента, <%>, эквивалентный 0.01.

Вычислительный процессор интерпретирует их следующим образом:

$$\pi = 3.142$$

$$e = 2.718$$

$$\infty = 1 \times 10^{307}$$

$$i = i$$

$$j = i$$

$$\% = 0.01$$

Символьный процессор распознает каждое из них, исходя из математического контекста, и способен выдавать математические константы в качестве результата.

Системные переменные

- $TOL = 1 \times 10^{-3}$ - точность численных методов;
- CTOL - точность выполнения выражений, используемая в некоторых численных методах;
- ORIGIN - номер начального индекса в массивах;

- PRNPRECISION - установка формата данных при выводе в файл;
- PRNCOLWIDTH - установка формата столбца при выводе в файл.

Приведем примеры присваивания (идущие последовательно):

x = переменная не определена и не может быть выведена;

$x := 5$ переменной x присваивается значение «5»;

$\ln(x) = 1.609$ выводится значение функции для $x = 5$;

$y = 10$ переменная y выводится, т.к. определена далее глобально;

$\ln(y) = 2.303$ вывод значения функции для глобального значения y ;

$y := 123$ переменная y переопределена локально:

$y = 123$ вывод значения переменной y ;

$e = 2.718$ вывод значения системной переменной e ;

$e ::= 10$ переопределение системной переменной;

$e = 10$ вывод значения переопределенной переменной e ;

$y \equiv 10$ переменная y определяется глобально.

Ранжированные переменные

В пакете MathCAD существует возможность выполнять повторяющиеся вычисления. Для этого используется специальный тип переменных — ранжированные переменные, или дискретные аргументы (от английского слова range — диапазон). Ранжированная переменная принимает диапазон значений, например, все целые числа, от 0 до 10. Если в выражении присутствует дискретный аргумент (ранжированная переменная), то MathCAD вычисляет выражение столько раз, сколько значений содержит этот дискретный аргумент.

Чтобы можно было вычислить выражение для диапазона значений, сначала надо определить ранжированную переменную, то есть задать присваивание:

$x := x_1, x_2 \dots x_n$

где x - имя ранжированной переменной; x_1 — первое значение из диапазона; x_2 — второе значение; x_n — последнее значение.

Две точки подряд «...» набираются как единый символ нажатием клавиши «;» или кнопкой на панели Arithmetic (Счет). MathCAD определяет приращение аргумента как разность между вторым и первым значениями заданного диапазона и создает одномерный массив значений x . Все эти значения хранятся в памяти и выводятся при необходимости оператором вывода (обычный знак равенства после имени ранжированной переменной) в виде столбца с ограниченным числом строк. Числовые значения в столбце могут корректироваться.

Если шаг дискретного аргумента равен единице, то его определение может иметь упрощенную форму:

$i := m..n$

Шаг подразумевается либо 1, когда $m < n$, либо —1, когда $m > n$.

Примеры:

$i := 1..5$ задает диапазон из 5-ти значений: 1, 2, 3, 4, 5;

$x := 1,1 \dots 2,0$ задает диапазон из 11-ти значений: 1,1-1,12,- ,2,0;

$z := -0,4, -0,2 \dots 0,2$ задает диапазон из 4-х значений: -0,4, -0,2,0,0,2.

Использование ранжированной переменной в выражении приводит к образованию совокупности результатов. При необходимости сохранения результатов вычислений применяют индексированные переменные, которые соответствуют векторному типу переменных. Например, нельзя писать $f := i * 2$, где f - простая переменная, а i - дискретный аргумент; в этом случае должен создаваться вектор f из такого же количества элементов, что и аргумент i , т.е. $f_i := i * 2$.

Функции в MathCAD

Функции в MathCAD можно разделить на встроенные в систему (их называют также стандартными) и задаваемые самим пользователем. MathCAD предоставляет очень широкий набор встроенных функций — более двухсот. Они разбиты на ряд категорий, таких, например, как функции Бесселя, векторные и матричные, функции статистики и т.д. Наиболее часто возникает необходимость в элементарных функциях, таких как синус или логарифм. Чтобы использовать функцию в выражении, надо определить значения входных параметров в скобках после имени функции. Аргумент и значение элементарных функций могут быть действительными или комплексными числами. Все углы измеряются в радианах. Имена простейших математических функций можно ввести с панели инструментов Arithmetic (Счет). Информацию о других функциях можно почерпнуть в справочной системе. Вставить стандартную функцию в выражение можно при помощи команды Insert $\Rightarrow$ Function (Вставка $\Rightarrow$ Функция) (можно также воспользоваться комбинацией клавиш CTRL+E). В открывшемся диалоговом окне слева выбирается категория, к которой относится функция, а справа — конкретная функция. В нижней части окна выдается краткая информация о выбранной функции. При вводе функции через это диалоговое окно автоматически добавляются скобки и поля заполнения для параметров.

Несмотря на довольно широкий набор встроенных функций, всегда возникает необходимость в определении собственных функций, представляющих интерес для конкретной решаемой задачи, т. е. в функциях пользователя. Они вводятся обычным оператором присваивания:

Имя_функции (Список_параметров) := Выражение

Имя функции задается идентификатором как обычное имя переменной. В скобках указывается список параметров функции: это перечень формальных аргументов, разделяемых как обычно запятыми. Выражение — это любое выражение, содержащее доступные системе операторы и функции с операндами и аргументами, указанными в списке параметров.

Примеры задания функций:

$$\text{Func}(x) := 10 * (1 - \exp(x)) \quad \text{module}(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$$

Функции, заданные с применением обычного знака присваивания, являются локальными, поэтому они должны быть заданы в документе до того, как будут использованы. При использовании пользовательской функции в последующих формулах ее имя вводят вручную. В диалоговом окне Insert $\Rightarrow$ Function (Вставка $\Rightarrow$ Функция) оно не отображается.

Набор скалярных выражений с помощью клавиатуры

оператор	набор	назначение оператора
$x := a$	$x : a$	присваивание
$x \equiv b$	$x \sim b$	глобальное присваивание
$x =$	$x =$	Вывод значения на экран
$x \cdot y$	$x * y$	Умножение
$\frac{x}{y}$	x / y	деление
x^y	$x ^ y$	Возведение в степень
$\sqrt{x}$	$x \backslash$	Квадратный корень
()	' (апостроф)	Ввод пары круглых скобок
α	Ctrl+G	Замена латинских на греческие

Задание 1

Вычислить заданную функцию $F(x, y)$ для ряда значений аргументов x и y при некоторых постоянных значениях входящих в нее величин a и b .

Порядок выполнения задания:

1. Создать личную папку для хранения создаваемых рабочих документов.
2. Запустить программу MathCAD.
3. Открыть панель инструментов Arithmetic (Счет).
4. Присвоить конкретные значения константам a и b .
5. Определить в соответствии с полученным заданием функцию $F(x, y)$.
6. Вывести два значения функции при $x = 1, y = 1$ и при $x = 0, y = 0$.
7. Изменить значения констант a и b , проследить за изменением функции.
8. Ввести ранжированную переменную x .
9. Вывести три столбца значений функции при трех различных значениях y .
10. Изменить шаг по переменной x , проследить за изменением количества значений функции.
11. Завершить работу, выбрав команду Exit (Выход) из меню File (Файл).

Варианты:

1. $F(x, y) = \sin^2(x - a) + \frac{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}{1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \cos(x + a)}$
2. $F(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^4 + y^4}} (ax^2 + \frac{a}{b}x^2y + \frac{b}{a}xy^2 + by^2)$
3. $F(x, y) = \ln \left| \frac{x - a}{y - b} \right| + e^{\frac{x}{a}} \frac{x^3 + ax^2 + a^2x + a^3}{(y - b)^2}$
4. $F(x, y) = \sin^2(x - \frac{p}{a}) + \frac{y^2 + xy + x^2}{a^2 + b^2} \cos^2(x - \frac{p}{a})$
5. $F(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)} \frac{\cos(\frac{x}{a}) - \sin(\frac{y}{b})}{\cos^2(\frac{y}{a}) + \sin^2(\frac{x}{b})}$
6. $F(x, y) = \frac{\sqrt[5]{|x^2 - y^2|}}{x\sqrt{ay} + y\sqrt{bx}}$
7. $F(x, y) = \frac{\operatorname{tg}\left(a \frac{x}{y}\right) - \operatorname{ctg}\left(b \frac{y}{x}\right)}{ax^2 + by^2} e^{(\sqrt{ax} + \sqrt{by})}$
8. $F(x, y) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{\sqrt{|x - a|} + \sqrt{|y - b|}} (a \cdot \cos \frac{x}{p} + b \cdot \sin \frac{y}{p})$
9. $F(x, y) = \frac{(x - a)^3}{y + (x - a)^2} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}$
10. $F(x, y) = \frac{x + \frac{y}{b}}{y - \frac{x}{a}} \cos^2\left(\frac{x}{p}\right) + \frac{y - \frac{x}{a}}{x - \frac{y}{b}} \sin^2\left(\frac{y}{p}\right)$
11. $F(x, y) = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 y - \sin^2 x} (ax^2 + abxy + by^2)^{1/3}$

$$12. \quad F(x, y) = e^{ax^2+by^2} \frac{\cos^2\left(\frac{x-a}{p}\right) + \sin^2\left(\frac{y-b}{p}\right)}{\sqrt[3]{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2}}$$

$$13. \quad F(x, y) = \frac{ax^2 + (a-b)xy + by^2}{\sqrt[3]{\left|\frac{x}{p} - a\right|} + \sqrt[3]{\left|\frac{y}{p} - b\right|}} \cdot \left(\cos\frac{x}{p} + \sin\frac{y}{p}\right)$$

$$14. \quad F(x, y) = \frac{\sqrt[5]{(x-y)^2}}{|x^3 - y^3| - ab} \cdot \left(\sin^2\frac{x-a}{p} + \cos^2\frac{y-b}{p}\right)$$

$$15. \quad F(x, y) = \frac{\sin\frac{x}{p} - \cos\frac{y}{p}}{(x-y)^2 + ab} \cdot \sqrt[4]{ax^3 - by^3}$$

Векторы и матрицы

Векторы и матрицы рассматриваются в MathCAD как одномерные и двумерные массивы. Массив, как и любая переменная, задается именем. Массив характеризуется определенным порядком расположения элементов. Над элементами массива можно совершать действия, как над обычными числами. Для этого нужно правильно задать индекс или сочетание индексов массива. Стартовый индекс массива задается системной переменной ORIGIN, которая по умолчанию равна 0. Если необходимо изменить значение переменной ORIGIN, это можно сделать с помощью операции присваивания. Индексы элементов могут иметь только целочисленные значения. В матрице первый индекс обозначает номер строки, второй - номер столбца. Матричные индексы разделяются запятой. Чтобы получить доступ к элементу массива, необходимо ввести имя переменной массива и индекс, который вводится либо с панели Matrix, кнопка Subscript, либо нажатием клавиши <[>. Помимо доступа к отдельным элементам массива, имеется возможность совершать действия над его подмассивами (например, векторами-столбцами, образующих матрицу). Делается это с помощью оператора со значком $\times \diamond$ на панели Matrix (Матрица).

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{0,0} = 1$$

$$a_{2,0} = 8$$

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$a_{1,1} = 1$$

$$a_{3,1} = 8$$

Рассмотрим некоторые способы создания массивов:

1. Вставка шаблона матрицы: Пункт меню **Вставка** - **Матрица**, либо через инструментальную панель «Матрицы», либо сочетанием клавиш <Ctrl>+<M>. В результате на экране появляется окно работы с матрицами. Введите число столбцов (первое окно), число строк (второе окно) и щелкните на кнопке ОК или Вставить. В первом случае на рабочем листе появится заготовка матрицы с заданным числом строк и столбцов. Во втором заготовка также появится, но окно работы матрицы не исчезнет, в этом случае в матрицу можно добавить строки или столбцы. Вектор задается как матрица, имеющая один столбец.
2. Присваивание значений непосредственно отдельным элементам. Если задать значение определенного элемента, например, $a_{2,2} := 3$, то появится матрица, имеющая три строки и

$$a_{2,2} := 3$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

три столбца, в которой элемент $a_{2,2} = 3$, а остальные равны нулю.

В любом месте документа допускается как переопределение любого из элементов массива, так и изменение его размерности

$$a_{4,4} := 10$$

$$a_{1,3} := -5$$

$$a = \blacksquare$$

Простейшие операции матричной алгебры реализованы в MathCAD в виде операторов. Написание операторов по смыслу максимально приближено к их математическому действию. Каждый оператор выражается соответствующим символом. Так как векторы являются частным случаем матриц размерности $N \times 1$, то для них справедливы все те операции, что и для матриц, если ограничения особо не оговорены.

Непосредственное проведение векторных операций над строками, т.е. матрицами размерности $1 \times N$, невозможно, для того, чтобы превратить строку в вектор, ее нужно предварительно транспонировать.

К простейшим операциям относятся следующие:

1. *Транспонирование.* Ввод символа транспонирования M^T осуществляется с помощью панели инструментов **Matrix** (Матрица) или нажатием клавиш

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$a^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ctrl} > + < 1 > . \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

2. *Сложение.* В MathCAD можно как складывать матрицы, так и вычитать их, применяя символы $<+>$, $<->$.
3. *Умножение.* При этом нужно помнить, что матрицу размерности $M \times N$ можно умножать только на матрицу размерности $N \times P$, где P может быть любым. Умножение производится нажатием клавиши $<*>$ и обозначается точкой.
4. *Вычисление определителя матрицы.* Чтобы ввести оператор нахождения определителя, можно нажать кнопку **Детерминант** ($|x|$) на панели инструментов **Matrix** (Матрица) или комбинацию клавиш $<\text{Shift}> + <\backslash>$ на клавиатуре. В результате любого из этих действий появляется местозаполнитель, в который следует поместить матрицу. Если матрица уже создана, то для вычисления определителя нужно выделить ее курсором справа и ввести оператор нахождения определителя.
5. *Нахождение модуля вектора.* Он равен квадратному корню из суммы квадратов элементов вектора. Обозначается так же, как и определитель матрицы.

6. *Вычисление скалярного произведения векторов.* Векторы должны иметь одинаковую размерность. Обозначается символом умножения $\langle * \rangle$ или нажатием соответствующей кнопки на панели Матрица ($\langle \vec{x} \cdot \vec{y} \rangle$).
7. *Нахождение векторного произведения.* Обозначается символом $\times$, который можно ввести нажатием кнопки $(\vec{x} \times \vec{y})$ в панели Матрица или сочетанием клавиш $\langle \text{Ctrl} \rangle + \langle 8 \rangle$.
8. *Вычисления обратной матрицы.* Поиск ее возможен, если матрица квадратная, и ее определитель не равен нулю. Для вычисления обратной матрицы нажмите кнопку (x^{-1}) на панели инструментов Матрица.
9. *Возведение матрицы в степень.* Применяется для квадратных матриц. Оператор возведения в степень такой же, как и для скалярной величины (кнопка (x^2) или (x^y) на панели инструментов Калькулятор).
10. *Векторизация массивов.* Это специализированный оператор, позволяющий провести однотипную операцию над всеми элементами массива (матрицы или вектора). Например, если V - вектор, то выражение $\cos(V)$ будет недопустимым, так как аргументом функции может быть только скалярная величина. Со знаком векторизации результатом операции будет вектор, каждый элемент которого есть косинус соответствующего значения элемента исходного вектора.

$$v := \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \sin(\vec{v}) = \blacksquare$$

$$\xrightarrow{\sin(v)} = \begin{pmatrix} 0.909 & -0.757 \\ -0.279 & 0.989 \\ 0 & -0.959 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\cos(v)} = \begin{pmatrix} -0.416 & -0.654 \\ 0.96 & -0.146 \\ 1 & 0.284 \end{pmatrix}$$

11. *Возможность использования матричных операторов в символьных вычислениях.*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ w & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} o & p & q \\ r & s & t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \cdot o + b \cdot r & a \cdot p + b \cdot s & a \cdot q + b \cdot t \\ c \cdot o + d \cdot r & c \cdot p + d \cdot s & c \cdot q + d \cdot t \\ w \cdot o + f \cdot r & w \cdot p + f \cdot s & w \cdot q + f \cdot t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{d}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{-b}{(a \cdot d - b \cdot c)} \\ \frac{-c}{(a \cdot d - b \cdot c)} & \frac{a}{(a \cdot d - b \cdot c)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} q \\ r \\ t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b \cdot t - c \cdot r \\ c \cdot q - a \cdot t \\ a \cdot r - b \cdot q \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right| \rightarrow \left[(|a|)^2 + (|b|)^2 + (|c|)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Существуют также встроенные векторные и матричные функции, облегчающие решение задач линейной алгебры и других сфер применения векторов и матриц.

Векторные функции:

`length(V)` - возвращает количество элементов вектора V;

`last(V)` - возвращает номер последнего элемента вектора;

`max(V)` - возвращает максимальный по значению элемент;

`min(V)` - возвращает минимальный по значению элемент;

`sort(V)` - сортировка элементов вектора в порядке возрастания;

`reverse(V)` - перестановка элементов (после `sort`) в обратном порядке.

Матричные функции:

`cols (M)` - возвращает число столбцов матрицы M;

`rows (M)` - возвращает число строк матрицы M;

`max(M)` - возвращает максимальный по значению элемент;

`min(M)` - возвращает минимальный по значению элемент;

`rank(M)` - возвращает ранг матрицы;

`tr (M)` - вычисление следа матрицы - суммы диагональных элементов;

`mean (M)` - возвращает среднее значение всех элементов матрицы;

`csort (M, n)` - перестановка строк матрицы M таким образом, чтобы отсортированным оказался n- й столбец матрицы;

`rsort (M,n)` - перестановка столбцов матрицы M таким образом, чтобы отсортированным оказалась n- я строка матрицы;

identity(n) - создает единичную матрицу порядка n.

Задание 1.

Вычислить определитель матрицы M. Доказать равенство: $M^2 = M$.

Найти матрицу $I = 2M - E$, где E - единичная матрица, вычислить ее определитель и матрицу, обратную матрице I. Доказать, что $I^2 = E$.

Порядок выполнения задания:

1. Ввести матрицу M.
2. Вычислить $\det M$ и M^2 .
3. Сравнить матрицы M и M^2 , сделать вывод.
4. Ввести единичную матрицу E той же размерности, что и матрица M.
5. Вычислить матрицу $I = 2M - E$.
6. Вычислить матрицу I^2 .
7. Доказать равенство $I^2 = E$.
8. Вычислить $\det I$ и I^{-1} .

Варианты:

$$1. M := \begin{pmatrix} 0.646 & -0.227 & -0.421 \\ -0.227 & 0.854 & -0.270 \\ -0.421 & -0.270 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$2. M := \begin{pmatrix} 0.587 & 0.189 & -0.455 \\ 0.189 & 0.931 & 0.208 \\ 0.455 & 0.208 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$3. M := \begin{pmatrix} 0.990 & 0.070 & -0.071 \\ 0.070 & 0.510 & 0.495 \\ -0.071 & 0.495 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$4. M := \begin{pmatrix} 0.714 & -0.247 & -0.378 \\ -0.247 & 0.786 & 0.327 \\ 0.378 & 0.327 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$5. M := \begin{pmatrix} 0.540 & 0.136 & 0.479 \\ 0.136 & 0.960 & -0.142 \\ 0.479 & 0.142 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$6. M := \begin{pmatrix} 0.961 & 0.134 & 0.140 \\ 0.134 & 0.539 & -0.480 \\ 0.140 & -0.480 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$7. M := \begin{pmatrix} 0.784 & -0.248 & -0.328 \\ -0.248 & 0.716 & -0.377 \\ -0.328 & -0.377 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$8. M := \begin{pmatrix} 0.511 & 0.072 & -0.495 \\ 0.072 & 0.989 & 0.073 \\ -0.495 & 0.073 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$9. M := \begin{pmatrix} 0.915 & 0.188 & -0.206 \\ 0.188 & 0.585 & 0.456 \\ -0.206 & 0.456 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$10. M := \begin{pmatrix} 0.852 & 0.228 & 0.272 \\ -0.228 & 0.648 & 0.420 \\ 0.272 & 0.420 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$11. M := \begin{pmatrix} 0.872 & 0.218 & 0.253 \\ 0.218 & 0.628 & -0.431 \\ 0.253 & -0.431 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$12. M := \begin{pmatrix} 0.856 & 0.226 & 0.268 \\ 0.226 & 0.644 & -0.422 \\ 0.268 & -0.422 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$13. \quad M := \begin{pmatrix} 0.912 & -0.191 & -0.210 \\ -0.191 & 0.588 & -0.454 \\ -0.210 & -0.454 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$15. \quad M := \begin{pmatrix} 0.789 & -0.247 & -0.325 \\ -0.247 & 0.711 & 0.380 \\ -0.325 & 0.380 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$14. \quad M := \begin{pmatrix} 0.509 & -0.068 & -0.495 \\ -0.068 & 0.991 & -0.068 \\ -0.495 & -0.068 & 0.500 \end{pmatrix}$$

$$16. \quad M := \begin{pmatrix} 0.959 & -0.138 & -0.144 \\ -0.138 & 0.541 & -0.479 \\ 0.144 & 0.479 & 0.500 \end{pmatrix}$$

Работа № 2.

ГРАФИК ФУНКЦИИ.

Цель: научиться строить двумерные графики в среде MathCAD.

MathCAD позволяет строить двумерные графики в декартовой и полярной системах координат, а также трехмерные графики, включая изображения поверхностей, карты линий уровня и ряд других {всего семь типов, называемых «великолепной семеркой» MathCAD). Доступ к данной операции осуществляется через панель Graph (Графика), либо через соответствующий пункт меню Graphics (Графики) (в последних версиях пакета доступ к опции Graph (Графика) реализуется через пункт меню Insert (Вставка)):

- Create X-Y Plot — (X-Y Зависимость) - график функции одной переменной в декартовых координатах;
- Create Polar Plot (Полярные координаты) - график функции одной переменной в полярных координатах;
- Create Surface Plot (Поверхности) — график поверхности в трехмерном пространстве;
- Create Contour Plot (Контурный) - карта линий уровня в трехмерном пространстве;
- Create 3D Scatter Plot (Точечный) — изображение точек в трехмерном пространстве, заданных декартовыми координатами;
- Create 3D Bar Plot (Диаграммы) – трехмерная гистограмма;
- Create Vector Plot (Векторный) – векторное поле на плоскости.

Отметим также, что требование на построение декартового графика можно реализовать с помощью «горячей» клавиши (@), а поверхности — (Ctrl+2).

Рассмотрим построение обычного графика на плоскости с двумя осями — горизонтальной и вертикальной. Перед построением графика, необходимо определить функции, которые должны быть построены, а также задать диапазон изменения аргумента (ранжированную переменную). Затем установить графический курсор на место предполагаемого левого верхнего угла графика (картинки) и выдать одним из ранее указанных способов (например, клавишей @) команду на построение. В результате на экране появляется прямоугольная рамка с шестью полями заполнения в виде черных маленьких прямоугольников около осей будущего графика. Пустое поле в середине горизонтальной оси предназначено для независимой переменной графика. В это поле можно вводить ранжированную переменную, переменную с индексом или любое выражение, содержащее ранжированную переменную. Перемещаться по полям заполнения удобнее с помощью мыши, но можно использовать и клавиши управления курсором. Пустое поле в середине вертикальной оси предназначено для функций, графики которых

предполагается построить. В это поле можно вводить ранжированную переменную, переменную с индексом или любое выражение, содержащее переменную, находящуюся на горизонтальной оси. Если надо построить несколько графиков на одном рисунке, то имена функций отделяются друг от друга запятыми. Другие четыре пустые поля могут использоваться для принудительного задания диапазонов изменения аргумента и функций. Если они не заполняются пользователем, то MathCAD автоматически выбирает границы на осях координат. Рекомендуется всегда вначале использовать автоматическое масштабирование и лишь затем изменять масштабы на более подходящие.

Чтобы произошло построение графика в автоматическом режиме вычислений (этот режим устанавливается по умолчанию), достаточно щелкнуть мышью за пределами графической области. В режиме ручных вычислений — Manual, нужно нажать клавишу F9.

Если в построенном графике что-либо не вполне удовлетворяет пользователя, можно применить операции изменения формата через диалоговое окно форматирования двумерных графиков. Это окно вызывается двойным щелчком в пределах графической области или активизацией пункта X-Y Plot ... Format (Формат Декартовых графиков ...) из меню Graphics (Графики).

Диалоговое окно формата имеет четыре вкладки:

X-Y Axes (X-Y Оси) — управление параметрами осей;

Traces (Графики) — управление параметрами линии графика;

Labels (Надпись) - установка надписей по осям и титульной надписи;

Defaults (По умолчанию) — задание режима по умолчанию.

Рассмотрим возможности форматирования, представленные на каждой вкладке. В первой из них X-Y Axes содержатся следующие основные опции, относящиеся к осям X и Y по отдельности:

Log Scale (Лог.масштаб) - установка логарифмического масштаба. Когда выбрана эта опция, выделенная ось имеет логарифмический масштаб, при этом границы по оси должны быть положительными числами.

Grid Lines (Линии сетки) — установка линий масштабной сетки. При активизации данной опции деления на выбранной оси заменяются линиями сетки. Отметим, что если опция Grid Lines (Линии сетки) отключена, то масштабная сетка графика не строится, но на осях размещаются короткие масштабные деления.

Numbered (Пронумеровать) — установка цифровых данных по осям. Когда отмечен этот квадратик, на выбранной оси у делений проставляются числовые значения.

Autoscale (Автомасштаб) — автоматическая установка масштабных линий. Определяет способ, которым автоматически устанавливаются границы на оси координат, если оси не были установлены вручную. Если эта опция не выбрана, MathCAD устанавливает границу на оси по

предельному значению данных. Если выбрана, то в качестве границы на оси берется значение, соответствующее последующей за предельным значением данных осевой метке.

Show Markers (Нанести риски) - просмотр маркеров. Данная опция позволяет добавлять к графику фоновые линии.

Auto Grid (Автосетка) — автоматическая установка масштабных линий. При активизации данной опции MathCAD автоматически выбирает число интервалов сетки, в противном случае можно установить число интервалов сетки, набирая в поле No. of Grid (Число интервалов) число интервалов от 2 до 99 (в режиме логарифмического масштаба опция не работает).

No. of Grid (Число интервалов) - установка числа масштабных линий. Это поле указывает число интервалов сетки на соответствующей оси. Оно доступно, когда режимы Auto Grid (Авто сетка) и Log Scale (Лог. масштаб) отключены.

В дополнение к этим переключателям предоставляется возможность установить стиль координатных осей — опция Axes Style (Стиль осей): кнопка Boxed (Рамка) заключает график в координатную рамку в виде прямоугольника; в этом случае оси находятся по краям графика; кнопка Crossed (Репер) показывает оси, пересекающиеся в центре графика. Если выбрать None (Ничего), оси вообще не будут отображаться на графике.

Следующая вкладка Traces (Графики) служит для управления отображением линий, которыми строится график. На рисунке могут располагаться до шестнадцати разных графиков. Каждому графику соответствует строка в прокручиваемом списке. По мере появления новых графиков MathCAD ставит в соответствие каждому одну из этих строк. Каждая строка имеет шесть полей.

Опция Legend Label (Имя кривой) — позволяет каждой кривой поставить в соответствие определенный текст, называемый легендой. Легенда отображается под рисунком вместе с образцом линии графика.

Опция Symbol (Символ) — выбор символа-маркера, которым отмечается каждая базовая точка на кривой. В качестве символов можно использовать x — наклонный крестик; + - прямой крестик; box — квадратик; dmnd — ромбик. Если точки расположены близко друг к другу, следует выбрать none (ничего).

Опция Line (Линия) - установка типа линий. Опция Line (Линия) позволяет выделить графики отдельных функций следующими типами линий: none (ничего) — линия не строится; solid (сплошная) - непрерывная линия; dash (штрих) — пунктирная линия; dadot (штрихпунктир) — штрих пунктирная линия. Модифицируя тип линии, легко отличить немаркированные кривые в черно-белых распечатках.

Опция Color (Цвет) — цвет линий. Она задает следующие основные цвета линий: red-красный, blu – синий, grl - зеленый, cya — голубой, brn — коричневый, blc — черный.

Опция Weight (Толщина) — толщина линий. Это поле управляет насыщенностью или толщиной линии графика (как правило рекомендуется толщина 1).

Опция Type (Тип) — позволяет задать один из семи типов графика: line — построение линиями; points — построение точками; err — построение вертикальными черточками с оценкой интервала погрешностей (этот вид графика строится с использованием двух функций); bar — построение в виде столбцов гистограммы; step - построение ступенчатой линией; draw — построение протяжкой от точки к точке.

Еще две опции связаны с возможностью удаления с графика вспомогательных надписей: Hide Argument (Скрыть переменную) — прячет обозначение математического выражения по осям графика и Hide Legend (Скрыть имена) — прячет названия кривых графика.

Вкладка Label (Надписи) позволяет вводить в рисунок дополнительные надписи: Title (Заголовок) - титульная надпись к рисунку; X-Axis (X-ось) — надпись по оси X; Y-Axis (Y-ось) — надпись по оси Y. В разделе Title содержатся опции Above (Сверху) и Below (Снизу) для размещения титульной надписи либо над рисунком, либо под ним. Опция Show Title (Показать заголовок) позволяет включать или не включать отображение титульной надписи.

Последняя вкладка Defaults (По умолчанию) возвращает прежние установки параметров рисунка - Change to Defaults (Вернуть значения). Это позволяет отменить все изменения формата рисунка, которые были сделаны с момента его создания. Можно установить и зафиксировать новые выбранные параметры, которые следует использовать в дальнейшем при построении графиков функций одной переменной — Use for Defaults (Использовать для значений по умолчанию) (т.е. для графиков того типа, с которыми проводилась текущая работа).

Для визуализации применяемых опций служит кнопка Apply (Применить). Она позволяет наблюдать над производимыми изменениями еще до закрытия окна форматирования, что облегчает экспериментирование с различными форматами графиков.

Поскольку в задании на построение графиков встречаются кусочно-непрерывные функции, рассмотрим приспособленную для таких целей конструкцию if:

if (cond, f1, f2).

Это функция, которая возвращает f1, если аргумент cond имеет значение «истина», в противном случае выдается значение f2. Аргумент cond может быть любым логическим выражением, но чаще всего используются обычные отношения сравнения между вещественными скалярами (равенство и неравенство возможно и между комплексными значениями):

Условие	Набор
$x = y$	Ctrl=
$x > y$	>
$x < y$	<
$x \geq y$	Ctrl 0

$$x \leq y$$

Ctrl 9

$$x \neq y$$

Ctrl 3

Можно объединять отношения, чтобы записать более сложные условия. Например, условие $(x < 1) \cdot (x > 0)$ действует подобно логическому «и», а выражение $(x > 1) + (x < 0)$ действует подобно логическому «или».

Задание 1.

Построить график состоящей из нескольких ветвей функции в заданном интервале изменения аргумента.

Порядок выполнения задания.

1. Задать конкретные значения констант а, b и т.д.
2. Определить функцию.
3. Задать диапазон изменения аргумента.
4. Построить график функции.
5. Варьировать параметры графика, изменяя цвет линий, толщину и пр., а также всеми другими доступными параметрами.
6. Задать другой диапазон изменения аргумента.
7. Добавить на рисунок еще одну зависимость, например, график стандартной функции $\sin x$.

Варианты

$$1. \quad y(x) = \begin{cases} 3\sqrt{|x-1|} - 3.25; \text{при} & x < -1.25 \\ -x; & \text{при} \quad -1.25 \leq x < 1.25 \\ 3.25 - 3\sqrt{x+1}; \text{при} & x \geq -1.25 \end{cases}$$

$$2. \quad y(x) = \begin{cases} \sin(x+1)^2; \text{при} & x < -1 \\ -(1 + \cos(\pi x)); \text{при} & -1 \leq x < 1 \\ \sin(x-1)^2; \text{при} & x \geq 1 \end{cases}$$

$$3. \quad y(x) = \begin{cases} -\cos 5\pi(x-0.2); & \text{npu } x < 0.2 \\ 1-2\cos 5\pi(x-0.2); & \text{npu } 0.2 \leq x < 0.4 \\ 3; & \text{npu } x \geq 0.4 \end{cases}$$

$$4. \quad y(x) = \begin{cases} 1+2x^2; & \text{npu } x \leq 0 \\ 1; & \text{npu } 0 < x < 0.5 \\ 1+(x-0.5)^4; & \text{npu } x \geq 0.5 \end{cases}$$

$$5. \quad y(x) = \begin{cases} 6 \cdot \sqrt[3]{|x|} - 5; & \text{npu } x < -1 \\ x^2; & \text{npu } -1 \leq x \leq 1 \\ 6 \cdot \sqrt[3]{x} - 5; & \text{npu } x > 1 \end{cases}$$

$$6. \quad y(x) = \begin{cases} 7\sqrt{|x-1|} - 11; & \text{npu } x < -3 \\ x; & \text{npu } -3 \leq x < 3 \\ 7\sqrt{x+1} - 11; & \text{npu } 3 \leq x \end{cases}$$

$$7. \quad y(x) = \begin{cases} \pi - (x + \pi)^2; & \text{npu } x < -\pi \\ \pi + \cos x + 1; & \text{npu } -\pi \leq x < \pi \\ \pi + (x - \pi)^2; & \text{npu } \pi \leq x \end{cases}$$

$$8. \quad y(x) = \begin{cases} 0; & \text{npu } x < 1 \\ \ln x / x; & \text{npu } 1 \leq x < e \\ x^2 / e^3; & \text{npu } e \leq x \end{cases}$$

$$9. \quad y(x) = \begin{cases} 1 + \sin^3(x + 0.5); & \text{npu } x < -0.5 \\ 1; & \text{npu } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 1 + \sin^3(x - 0.5); & \text{npu } 0.5 < x \end{cases}$$

$$10. y(x) = \begin{cases} x + e^{-x}; & \text{npu } x \leq 0 \\ 1; & \text{npu } 0 < x < 1 \\ 1 + (x-1)^2; & \text{npu } 1 \leq x \end{cases}$$

$$11. y(x) = \begin{cases} -\cos \frac{x+1}{2}; & \text{npu } x \leq -1 \\ \sin \frac{\pi}{2} x; & \text{npu } -1 < x < 1 \\ \cos \frac{x-1}{2}; & \text{npu } 1 \leq x \end{cases}$$

$$12. y(x) = \begin{cases} (x+1)^2; & \text{npu } x < -1 \\ (1 + \cos \pi x); & \text{npu } -1 \leq x < 1 \\ -(x-1)^2; & \text{npu } 1 \leq x \end{cases}$$

$$13. y(x) = \begin{cases} |x|; & \text{npu } x \leq 0 \\ -\sin(2\pi x)/(2\pi); & \text{npu } 0 \leq x \leq 1 \\ 1-x; & \text{npu } x \geq 1 \end{cases}$$

$$14. y(x) = \begin{cases} x(x+2); & \text{npu } x \leq -2 \\ \sin \pi x; & \text{npu } -2 \leq x \leq 0 \\ x(x+2); & \text{npu } x \geq 0 \end{cases}$$

$$15. y(x) = \begin{cases} \sqrt{x}; & \text{npu } x \geq \pi \\ \sin^2 x + \sqrt{x}; & \text{npu } 0 \leq x \leq \pi \\ x^2; & \text{npu } x < 0 \end{cases}$$

Работа № 3.

СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Цель: научиться вычислять первые и высшие производные в среде MathCAD.

MathCad позволяет выполнять не только численные расчеты, но и символьные (аналитические) вычисления. Это такие расчеты, где результатами преобразования выражений в ходе вычислений являются также выражения, представленные в символьном виде. При этом может быть задана желаемая форма преобразованных выражений. Первоначальное выражение можно разложить на множители, проинтегрировать, дифференцировать, разложить в ряд, реализовать некоторые интегральные преобразования и выполнить иные математические операции, например, матричные. Все символьные вычисления можно осуществить через пункт меню Symbolic. При выполнении символьных вычислений нужно иметь в виду, что:

- многие вычисления могут быть выполнены только численно;
- в ряде случаев получаются такие длинные ответы, что удобнее использовать соответствующие численные расчеты с последующим графическим представлением этих ответов;
- когда уравнение имеет несколько решений, MathCad иногда возвращает одно из них и запрашивает, показать ли весь результат, хранящийся в буфере обмена; при нажатии ОК MathCad показывает вектор решений и слово Root;
- символьные и численные расчеты выполняются двумя разными процессорами, между которыми можно организовать взаимодействие для сложных расчетов. Например, упростить сначала символьные выражения перед их использованием в численных вычислениях.

Вычисление первой и высших производных.

Чтобы получить первую производную от заданной функции, следует:

- вызвать оператор производной, щелкнув мышкой на нужной кнопке на палитре Calculus
- заполнить поля ввода для функции и переменной, по которой выполняется дифференцирование
- заключить выражение в выделяющую рамку
- нажать клавиши Shift/ F9.

Это приведет к появлению результата под функцией.

Получить первую производную от заданной функции можно и не используя оператор производной. Для этого нужно набрать функцию, выделить переменную, по которой выполняется дифференцирование (поставить рядом с ней маркер ввода) и

выполнить пункт меню **Symbolic/Differentiate on Variable**. Результат появится под функцией.

Чтобы получить высшую производную (n -ю производную) от заданной функции, следует:

- вызвать оператор n -ой производной, щелкнув мышкой на нужной кнопке на палитре Calculus
- заполнить поля ввода для функции и переменной, по которой выполняется дифференцирование
- заключить выражение в выделяющую рамку
- нажать клавиши **Shift/ F9**.

Результат появится под функцией.

Индивидуальные задания

Найдите первую и вторую производные функций своего варианта.

1. а) $f(x) = \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2x^4} - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 7$; б) $f(x) = \frac{e^x - \sin x}{\cos x + \sqrt{x}}$;

в) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + \ln x}$.

2. а) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3x^9} + \frac{5}{\sqrt[5]{x^3}} - 6$; б) $f(x) = (1 - x^2)(\operatorname{tg} x + 3^x)$;

в) $f(x) = e^{\sin 5x - 3}$.

3. а) $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - \frac{1}{6x^6} + \frac{7}{\sqrt[7]{x^3}} + 2$; б) $f(x) = \frac{\ln x - \operatorname{tg} x}{7^x - 5}$;

в) $f(x) = \sqrt{x^5 + \sin 5x}$.

4. а) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{7x^7} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + 1$; б) $f(x) = \frac{5^x - \ln x}{\cos x - 3}$;

в) $f(x) = \arcsin(5x^3 + 1)$.

5. а) $f(x) = 4x^5 - \frac{7}{4x^4} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + 2$; б) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{3^x - \ln x}$;

в) $f(x) = \cos(2x^2 + 3)$.

6. а) $f(x) = 2x^5 + \frac{4}{5x^5} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 3$; б) $f(x) = (x^2 - 3)(\sin x + 5^x)$;

6) $f(x) = e^{\sin 7x+3}$.

7. a) $f(x) = 6x^5 - \frac{5}{3x^3} + \frac{6}{\sqrt[4]{x^3}} + 2$; б) $f(x) = \frac{3^x + \cos x}{\ln x - \sqrt{x}}$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + 1}$.

8. a) $f(x) = 3x^4 - \frac{5}{6x^6} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}$; б) $f(x) = (e^x + \operatorname{tg} x)(\ln x - 2)$;

в) $f(x) = \operatorname{tg}(3^x - 5)$.

9. a) $f(x) = 5x^3 - \frac{3}{4x^4} - 7\sqrt[5]{x^3} - 2$; б) $f(x) = \frac{6^x - \cos x}{\operatorname{tg} x + \sqrt{x^3}}$;

в) $f(x) = e^{2x} + 3x \cdot \operatorname{tg} 2x$.

10. a) $f(x) = 4x^5 - \frac{3}{x^3} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} - 1$; б) $f(x) = (\ln x + \operatorname{tg} x)(\sqrt{x} - e^x)$;

в) $f(x) = (\operatorname{tg} 3x)^5$.

11. a) $f(x) = \frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{4x^4} + \frac{5}{3\sqrt{x}} + 3$; б) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x + \sqrt{x}}{3^x - \sin x}$;

в) $f(x) = \ln(x^3 + e^x - 2)$.

12. a) $f(x) = 4x^2 + \frac{3}{5x^3} - \frac{6}{\sqrt[3]{x^4}}$; б) $f(x) = (\sin x + 2^x)(\ln x - e^x)$;

в) $f(x) = e^{\operatorname{tg}(x^2-5)}$.

13. a) $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{4x^4} - 6\sqrt[3]{x} - 4$; б) $f(x) = \frac{\ln x - e^x}{\operatorname{ctg} x - \cos x}$;

в) $f(x) = \arcsin \sqrt{3^x - \frac{2}{x}}$.

14. a) $f(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{2}{3x^6} + \frac{1}{\sqrt{x}}$; б) $f(x) = (2 + \sqrt{x})(\operatorname{ctg} x - e^x)$;

в) $f(x) = (3^x - \ln x)^2$.

15. а) $f(x) = \frac{7}{9}x^9 - \frac{4}{3x^3} - 5\sqrt[5]{x^3} - 1$; б) $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x - 3}{5^x + \sqrt{x}}$;
 в) $f(x) = \ln(\ln x - \sin x)$.

Работа № 4.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

Цель: ознакомиться с основными методами решения систем линейных уравнений средствами MathCAD.

Центральным вопросом вычислительной линейной алгебры является решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), т.е. систем уравнений вида:

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} \cdot x_n = b_i$$

В матричной форме СЛАУ записывается в эквивалентном виде:

$$A \cdot x = b,$$

где A - матрица коэффициентов СЛАУ размерности $n \times n$;

x - вектор неизвестных;

b - вектор правых частей уравнений.

СЛАУ имеет единственное решение, если ее определитель не равен нулю. В MathCAD СЛАУ можно решить двумя способами:

1. С использованием вычислительного блока Given/Find: это специальный вычислительный блок, в котором после служебного слова Given задаются уравнения системы. Блок заканчивается обращением к функции поиска решения Find:

Given.

Уравнения и неравенства

Выражение с Find (x, y,...)

Параметрами функции Find. являются переменные, которые и подбираются в процессе решения, чтобы удовлетворялись уравнения и неравенства системы. Предварительно этим переменным перед Given необходимо присвоить начальные значения. При задании уравнений используется специальный жирный знак равенства, который набирается комбинацией клавиш Ctrl= . Ограничительные условия задаются с помощью операторов знаков отношений:

Оператор

$$x > y$$

$$x < y$$

$$x \geq y$$

$$x \leq y$$

$$x \neq y$$

$$x = y$$

Набор

$$x > y$$

$$x < y$$

$$x \text{ Ctrl } y$$

$$x \text{ Ctrl } (y$$

$$x \text{ Ctrl } \# y$$

$$x \text{ Ctrl } = y$$

$$x := 0 \quad y := 0 \quad z := 0$$

Given

$$1 \cdot x + 5 \cdot y + 2 \cdot z = 1$$

$$0.7 \cdot x + 12 \cdot y + 5 \cdot z = 2.9$$

$$3 \cdot x + 0 \cdot y + 4 \cdot z = 3.1$$

$$\text{Find}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -0.186 \\ -0.129 \\ 0.915 \end{pmatrix}$$

2. С использованием встроенной функции `lsolve`:

`lsolve(A, b)` - решение системы линейных уравнений;

где `A` - матрица коэффициентов системы;

`b` - вектор правых частей.

Матрицу при этом можно определять любым способом. Встроенную функцию `lsolve` можно применять и при символьном решении СЛАУ.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0.7 & 12 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2.9 \\ 3.1 \end{pmatrix}$$

$$\text{lsolve}(A, b) = \mathbf{r}$$

Функции, возвращающие специальные характеристики матриц

Следующие функции возвращают специальные характеристики матриц:

cond1(M)	— возвращает число обусловленности матрицы, вычисленное в норме L1;
cond2(M)	— возвращает число обусловленности матрицы, вычисленное в норме L2;
conde(M)	— возвращает число обусловленности матрицы, вычисленное в норме евклидова пространства;
condi(M)	— возвращает число обусловленности матрицы, основанное на равномерно норме;
norm1(M)	— возвращает L1 норму матрицы M;
norm2(M)	— возвращает L2 норму матрицы M;
norme(M)	— возвращает евклидову норму матрицы M;
normi(M)	— возвращает неопределённую норму матрицы M;

Задание 1

Решить систему алгебраических уравнений и исследовать влияние коэффициентов системы на её решение.

Порядок выполнения задания

1. Определить и заполнить матрицу коэффициентов систем линейных алгебраических уравнений.
2. Вычислить определитель матрицы.
3. Вычислить четыре нормы матрицы $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_F, \|A\|_\infty$.
4. Вычислить коэффициент обусловленности матрицы через стандартные функции cond1, cond2, condi, conde.
5. Определить и заполнить вектор правых частей системы уравнений – b_1 .
6. Вычислить и вывести решение системы уравнений $Ax_1=b_1$.
7. Определить и заполнить второй вектор правых частей – b_2 .
8. Вычислить и вывести решение системы уравнений $Ax_2=b_2$.
9. Вычислить относительную погрешность решения задачи и относительное возмущение вектора правых частей.
10. Вычислить отношение относительной погрешности решения к относительному возмущению вектора правых частей и сравнить полученное значение с коэффициентом обусловленности.
11. Исследовать подобным образом решение системы, изменяя диагональные элементы матрицы коэффициентов.

Варианты:

$$\begin{aligned}
 1. \quad A &= \begin{bmatrix} -13 & -8 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -3 & -13 \\ -13 & -8 & 3 & 4 & -1 \\ -13 & 9 & 4 & -1 & -6 \\ -26 & -17 & 7 & 3 & -7 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} -2.8 \\ -26.3 \\ -16.8 \\ -29.1 \\ -45.9 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} -1.80 \\ -26.10 \\ -15.80 \\ -29.77 \\ -46.90 \end{bmatrix} \\
 2. \quad A &= \begin{bmatrix} -12 & -7 & -2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 8 & -2 & -12 \\ -12 & -7 & 4 & 5 & 0 \\ -11 & -7 & 6 & 1 & -4 \\ -23 & -14 & 10 & 6 & -4 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 1.95 \\ -33.30 \\ -19.05 \\ -31.35 \\ -50.40 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2.95 \\ -33.00 \\ -18.05 \\ -32.35 \\ -51.90 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$3. \quad A = \begin{bmatrix} -11 & -6 & -1 & 4 & 9 \\ 2 & 1 & 9 & -1 & -11 \\ -11 & -6 & 5 & 6 & 1 \\ -9 & -5 & 8 & 3 & -2 \\ -20 & -11 & 13 & 9 & -1 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 10.8 \\ -36.2 \\ -17.2 \\ -25.4 \\ -42.6 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 11.80 \\ -35.80 \\ -16.20 \\ -26.73 \\ -44.60 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 0 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 10 & 0 & -10 \\ -10 & -5 & 6 & 7 & 2 \\ -7 & 3 & 10 & 5 & 0 \\ -17 & -8 & 16 & 12 & 2 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 23,75 \\ 35,00 \\ -11,25 \\ -11,25 \\ -22,50 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 24,75 \\ 34,50 \\ -10,25 \\ -12,92 \\ -25,00 \end{bmatrix}$$

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} -9 & -4 & 1 & 6 & 11 \\ 4 & 3 & 11 & 1 & -9 \\ -9 & 4 & 7 & 8 & 3 \\ -5 & -1 & 12 & 7 & 2 \\ -14 & -5 & 19 & 15 & 5 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 40.8 \\ -29.7 \\ -1.2 \\ 11.1 \\ 9.9 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 41.8 \\ 29.1 \\ -0.2 \\ 9.1 \\ -6.9 \end{bmatrix}$$

$$6. \quad A = \begin{bmatrix} -8 & -3 & 2 & 7 & 12 \\ 5 & 4 & 12 & 2 & -8 \\ -8 & -3 & 8 & 9 & 4 \\ -3 & 1 & 14 & 9 & 4 \\ -11 & -2 & 22 & 18 & 8 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 61.95 \\ -20.3 \\ 12.95 \\ 41.65 \\ 54.60 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 62.50 \\ -19.60 \\ 13.95 \\ 39.32 \\ 51.10 \end{bmatrix}$$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 3 & 8 & 13 \\ 6 & 5 & 13 & 3 & -7 \\ -7 & -2 & 9 & 10 & 5 \\ -1 & 3 & 16 & 11 & 6 \\ -8 & 1 & 25 & 21 & 11 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 87.2 \\ -6.8 \\ 31.2 \\ 80.4 \\ 111.6 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 88.20 \\ -6.00 \\ 32.00 \\ 77.73 \\ 107.60 \end{bmatrix}$$

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 4 & 9 & 14 \\ 7 & 6 & 14 & 4 & -6 \\ -6 & -1 & 10 & 11 & 6 \\ 1 & 5 & 18 & 13 & 8 \\ -5 & 4 & 28 & 24 & 14 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 116.55 \\ 10.85 \\ 53.55 \\ 127.35 \\ 180.90 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 117.55 \\ 11.70 \\ 54.55 \\ 124.35 \\ 176.40 \end{bmatrix}$$

$$9. \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 8 & 7 & 15 & 5 & -5 \\ -5 & 0 & 11 & 12 & 7 \\ 3 & 7 & 20 & 15 & 10 \\ -2 & 7 & 31 & 27 & 17 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 150.0 \\ 32.5 \\ 80.0 \\ 182.5 \\ 262.5 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 151.000 \\ 33.500 \\ 81.000 \\ 179.167 \\ 257.500 \end{bmatrix}$$

$$10. \quad A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 6 & 11 & 16 \\ 9 & 8 & 16 & 6 & -4 \\ -4 & 1 & 12 & 13 & 8 \\ 5 & 9 & 22 & 17 & 12 \\ 1 & 10 & 34 & 30 & 20 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 187.55 \\ 58.30 \\ 110.55 \\ 245.85 \\ 356.40 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 188.550 \\ 59.400 \\ 11.550 \\ 242.183 \\ 350.900 \end{bmatrix}$$

$$11. \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 7 & 12 & 17 \\ 10 & 9 & 17 & 7 & -3 \\ -3 & 2 & 13 & 14 & 9 \\ 7 & 11 & 24 & 19 & 14 \\ 4 & 13 & 37 & 33 & 23 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 229.2 \\ 88.2 \\ 145.2 \\ 317.4 \\ 462.6 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 230.2 \\ 89.4 \\ 146.2 \\ 313.4 \\ 465.6 \end{bmatrix}$$

$$12. \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 8 & 13 & 18 \\ 11 & 10 & 18 & 8 & -2 \\ -2 & 3 & 14 & 15 & 10 \\ 9 & 13 & 26 & 21 & 16 \\ 7 & 16 & 40 & 36 & 26 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 274.95 \\ 122.20 \\ 183.95 \\ 397.15 \\ 581.10 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 275.950 \\ 123.500 \\ 184.950 \\ 392.817 \\ 574.600 \end{bmatrix}$$

$$13. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 15 & 20 \\ 13 & 12 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 16 & 17 & 12 \\ 13 & 17 & 30 & 25 & 20 \\ 13 & 22 & 46 & 42 & 32 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 378.75 \\ 202.50 \\ 273.75 \\ 581.25 \\ 855.00 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 379.75 \\ 204.00 \\ 274.75 \\ 576.25 \\ 847.50 \end{bmatrix}$$

$$14. \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 9 & 14 & 19 \\ 12 & 11 & 19 & 9 & -1 \\ -1 & 4 & 15 & 16 & 11 \\ 11 & 15 & 28 & 23 & 18 \\ 10 & 19 & 43 & 39 & 29 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 324.8 \\ 160.3 \\ 226.8 \\ 485.1 \\ 711.9 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 325.800 \\ 161.700 \\ 227.800 \\ 480.433 \\ 704.900 \end{bmatrix}$$

$$15. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ 14 & 13 & 21 & 11 & 1 \\ 1 & 6 & 17 & 18 & 13 \\ 15 & 19 & 32 & 27 & 22 \\ 16 & 25 & 49 & 45 & 35 \end{bmatrix} \quad {}_A b_1 = \begin{bmatrix} 436.8 \\ 248.8 \\ 324.8 \\ 685.6 \\ 1010.0 \end{bmatrix} \quad {}_A b_2 = \begin{bmatrix} 437.800 \\ 250.400 \\ 325.800 \\ 680.267 \\ 1002.000 \end{bmatrix}$$

$$16. \quad A = \begin{bmatrix} -14 & -9 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 6 & -4 & -14 \\ -14 & -9 & 2 & 3 & -2 \\ 15 & 11 & 2 & 3 & 8 \\ -29 & -20 & 4 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} -3.45 \\ -15.20 \\ -10.45 \\ 18.65 \\ -29.10 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} -2.45 \\ -15.10 \\ -9.45 \\ 18.98 \\ -29.60 \end{bmatrix}$$

Работа № 5

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель: научиться решать нелинейные уравнения средствами MathCAD.

Многие уравнения, например трансцендентные, не имеют аналитических решений. Однако они могут быть решены численно итерационными методами с заданной погрешностью. Для решения одного уравнения вида $f(x) = 0$, с одним неизвестным в MathCAD используется функция root:

root (выражение, имя_переменной)

Первый аргумент есть либо функция, определенная где-либо в рабочем документе, либо выражение для вычисления скалярного значения. Второй аргумент имя переменной, которое используется в выражении. Этой переменной перед вызовом функции root необходимо присвоить числовое значение. MathCAD использует его как начальное приближение при поиске корня. Функция root возвращает значение этой переменной, при котором выражение обращается в ноль.

При использовании функции root следует иметь в виду:

- для выражения с несколькими корнями начальное значение определяет корень, который будет найден MathCAD;
- MathCAD позволяет находить как вещественные, так и комплексные корни. Для поиска комплексного корня следует взять в качестве начального приближения комплексное число.

MathCAD в функции root использует для поиска корня метод секущих. Когда значение выражения — первого аргумента функции, становится меньше значения встроенной переменной TOL, корень считается найденным, и функция root возвращает полученное значение.

Если после многих итераций MathCAD не может найти подходящего приближения, то появляется сообщение об ошибке: «отсутствует сходимость». Эта ошибка может быть вызвана следующими причинами:

- уравнение не имеет корней;
- корни уравнения расположены далеко от начального приближения;

выражение имеет локальные экстремумы между начальным приближением и корнями;
 выражение имеет разрывы между начальным приближением и корнями;
 выражение имеет комплексный корень, но начальное приближение было вещественным (или наоборот).

Чтобы установить причину ошибки, рекомендуется исследовать график функции $f(x)$. Он помогает выяснить наличие корней уравнения $f(x) = 0$ и, если они есть, определить приближенно их значения.

Для выражения $f(x)$ с известным корнем a нахождение дополнительных корней $f(x)$ эквивалентно поиску корней уравнения $h(x) = 0$, где $h(x) = f(x)/(x-a)$. Часто бывает проще искать корень выражения $h(x)$ чем пробовать искать другой корень уравнения $f(x)=0$, выбирая различные начальные приближения. Подобный прием полезен для нахождения корней, расположенных близко друг к другу.

Для нахождения корней многочлена вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

лучше использовать функцию polyroots, нежели root. Функция polyroots выдает сразу все корни, как вещественные, так и комплексные в виде вектора из n компонент. Кроме того, функция polyroots не требует начального приближения. Единственным аргументом функции polyroots является вектор из коэффициентов полинома длины $n+1$ polyroots (a).

MathCAD дает возможность решать также и системы уравнений. Максимальное число уравнений и переменных равно пятидесяти. Для этого служит специальный вычислительный блок, в котором после служебного слова Given задаются уравнения системы и различные ограничения в виде неравенств. Блок заканчивается обращением к функции поиска решения Find:

Given.

Уравнения и неравенства

Выражение с Find (x, y,...)

Параметрами функции Find. являются переменные, которые и подбираются в процессе решения, чтобы удовлетворялись уравнения и неравенства системы. Предварительно этим переменным перед Given необходимо присвоить начальные значения. При задании уравнений используется специальный жирный знак равенства, который набирается комбинацией клавиш Ctrl+=. Ограничительные условия задаются с помощью операторов знаков отношений:

Оператор

$$x > y$$

$$x < y$$

$$x \geq y$$

Набор

$$x > y$$

$$x < y$$

$$x \text{ Ctrl } = y$$

$x \leq y$	$x \text{ Ctrl } (y$
$x \neq y$	$x \text{ Ctrl } \# y$
$x = y$	$x \text{ Ctrl } = y$

Если система нелинейных уравнений не имеет решения, то можно попытаться найти приближение к несуществующему решению путем минимизации среднеквадратичной погрешности решения. Для этого в MathCAD введена функция Minerr (минимизация ошибки), которая используется вместо функции Find. При ее использовании надо проявлять известную осторожность и обязательно предусматривать проверку решений. Нередки случаи, когда решения могут оказаться ошибочными, чаще всего из-за того, что из нескольких корней предлагается нереальный (или не представляющий интереса) корень. Полезно как можно точнее указывать начальное приближение к решению.

Задание 1.

Найти все корни заданного алгебраического уравнения, используя функции root и polyroots. Сравнить полученные решения.

Порядок выполнения задания

1. Задать функцию, нули которой требуется найти.
2. Построить график функции для локализации ее нулей.
3. Задать начальное приближение.
4. Найти и вывести полученное значение вещественного корня.
5. Для поиска комплексных корней определить мнимую единицу.
6. Задать комплексное начальное приближение.
7. Последовательно найти все остальные корни исключая найденные корни из исходной функции.
8. Задать вектор коэффициентов многочлена.
9. Воспользоваться функцией polyroots для поиска корней.

Варианты

1. $x^5 - 2.2x^3 + 0.5x^2 - 7x = 3.4$.
2. $x^5 - 3.2x^3 + 1.5x^2 - 7x = 5.4$.
3. $x^5 - 5.2x^3 + 2.5x^2 - 7x = 2.4$.
4. $x^5 - 4.2x^3 + 3.5x^2 - 7x = 7.4$.
5. $x^5 - 2.2x^3 + 7.5x^2 - 7x = 3.9$.
6. $x^5 - 2.9x^3 + 6.5x^2 - 7x = 5.4$.
7. $x^5 - 3.2x^3 + 9.5x^2 - 7x = 7.5$.
8. $x^5 - 3.5x^3 + 2.5x^2 - 7x = -6.4$.
9. $x^5 - 9.2x^3 + 5.5x^2 - 7x = -1.4$.

$$10. x^5 - 8.2x^3 + 4.5x^2 - 7x = -6.5.$$

$$11. x^5 - 3.2x^3 + 2.5x^2 - 7x = -1.5.$$

$$12. x^5 - 7.2x^3 + 9.5x^2 - 7x = -2.5.$$

$$13. x^5 - 5.2x^3 + 5.5x^2 - 7x = -3.5.$$

$$14. x^5 - 1.2x^3 + 8.5x^2 - 7x = -4.5.$$

$$16. x^5 - 3.2x^3 + 1.5x^2 - 7x = -9.5.$$

Задание 2.

Решить систему из двух нелинейных уравнений.

Порядок выполнения задания

1. Задать начальное приближение.
2. Открыть блок решения, набрав слово Given.
3. Определить все уравнения системы, используя знак жирного равенства.
4. Найти решение системы, используя функцию Find.
5. Проверить полученное решение.

Варианты

$$1. \sqrt{2x + y + 2} = 3; \sqrt{x + 2y + 5} = y - x$$

$$2. \sqrt{y - x + 5} = 3; \sqrt{x + y - 5} = 11 - 2y$$

$$3. \sqrt{x + 9y + 7} = 6; \sqrt{2x + y} = 4y - 11$$

$$4. \sqrt{3x + 2y + 2} = 4; \sqrt{4y - 2x - 3} = 3x - 3$$

$$5. \sqrt{9x + 2y + 4} = 5; \sqrt{3y - 2x} = 3x + 1$$

$$6. \sqrt{x + 3y + 1} = 2; \sqrt{2x - y + 2} = 7y - 6$$

$$7. \sqrt{x + y + 1} = 3; \sqrt{3x - y + 8} = 2y - 12$$

$$8. \sqrt{3y - x + 8} = 4; \sqrt{2y - x + 4} = 6x - 3$$

$$9. \sqrt{3x + 5y + 3} = 4; \sqrt{x + y + 1} = 2y - 2$$

$$10. \sqrt{5y-x+11} = 6; \quad \sqrt{x+2y-1} = 2x-6$$

$$11. \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1; \quad 3x+2y = 4$$

$$12. \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y} = 3; \quad x+y = 4$$

$$13. \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y+1} = 3; \quad x-y = 1$$

$$14. \sqrt{2x+y} + \sqrt{y-x} = 1; \quad x+y = 3$$

$$15. \sqrt{x-y+4} - \sqrt{x+y} = 1; \quad 2x+y = 1.5$$

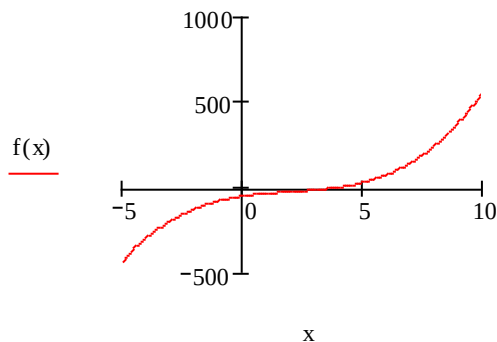
Пример:

Решение нелинейного уравнения

Строим графики функции, представляющей левую часть уравнения:

$$f(x) := x^3 - 6 \cdot x^2 + 21 \cdot x - 52$$

$$x := -5, -4.9.. 10$$



1. Поиск корней с помощью функции root:

Начальное приближение:

$$x := 0$$

Первый корень:

$$x1 := \text{root}(f(x), x) \quad x1 = 4$$

Определение мнимой единицы:

$$i := \sqrt{-1}$$

Комплексное начальное приближение:

$$x := 1 + 1 \cdot i$$

Второй корень:

$$x2 := \text{root}\left(\frac{f(x)}{x - x1}, x\right) \quad x2 = 1 + 3.464i$$

Третий корень:

$$x3 := \text{root} \left[\frac{f(x)}{(x - x1) \cdot (x - x2)}, x \right] \quad x3 = 1 - 3.464i$$

2. Поиск корней с помощью функции polyroots:

$$a := \begin{pmatrix} -52 \\ 21 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(a) = \begin{pmatrix} 1 + 3.464i \\ 1 - 3.464i \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решение системы нелинейных уравнений

а) *Первое решение:*

Начальное приближение:

$$x := 0 \quad y := 0$$

Given

$$y = x^2 \quad y = 3 \cdot x + 8$$

(уравнения системы)

$$x < 0$$

(ограничительное условие)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \text{find}(x, y) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.702 \\ 2.895 \end{pmatrix}$$

(решение)

Проверка:

$$x^2 = 2.895 \quad 3 \cdot x + 8 = 2.895$$

б) *Второе решение:*

$$x := 3 \quad y := 0$$

Given

$$y = x^2 \quad y = 3 \cdot x + 8 \quad x > 0$$

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} := \text{find}(x, y)$$

$$\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.702 \\ 22.105 \end{pmatrix}$$

$$x2^2 = 22.105 \quad 3 \cdot x2 + 8 = 22.105$$